

数学を用いて6面を完成させる

2年D組 佐藤 誠司 齋藤 俊 佐々木真希

佐藤 海生 佐藤 渡理

長谷山奈歩 真坂さくら

1. 要約

ルービックキューブを数学の情報だけを頼りにそろえる方法について調べた。ルービックキューブが揃えられるためには、それぞれの回転数が崩し方と一致すると考えた。そこで、実験1として完全一面体を作る過程で、三人それぞれの回転数が一致するのかを調べた。実験1の課題をもとに、実験2として6面体を揃える過程で三人それぞれの回転数が一致するのかを調べた。

2. 研究動機

家にあるルービックキューブを揃えるときに、ある解法を用いて揃えていたところ、何か数学的な法則があると考えた。そのため、私たちはルービックキューブの揃え方を数学的な情報だけを頼りに説明したいと考えた。

3. 用語の説明

まず図1のように、キューブの名称を定義した。
キューブの1面に色がついている箇所を一面体、キューブの2面に色がついている箇所を二面体、キューブの3面に色がついている箇所を三面体と定義した。

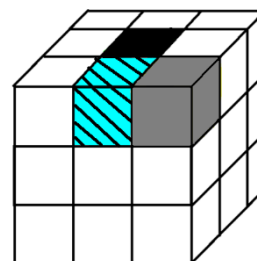


図1 キューブの名称

面を表す記号を図2のように定義した。上面をT、下面をB、左面をS、右面をN、前面をE、後面をWとした。またこの記号は、時計回りに90度回転した記号としても用いることとした。

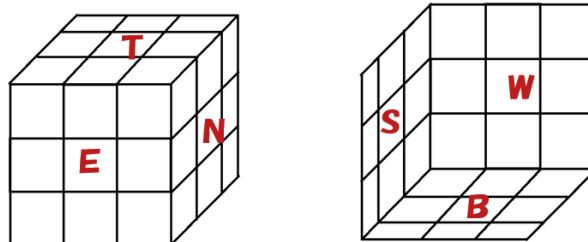


図2 面を表す記号

この記号を使って、式の表し方を意義付けた。上面 T を時計回りに 90 度回転することを T、180 度回転することを T²、270 度回転することを T³ とあらわす。このとき、指数は 90 度の何倍であるかを表す。また T⁻¹=T³、T⁻²=T² である。

この定義したことをもとに次に式を示す。

例えば、右面 E を時計回り 90 度回転させ、次に下面 B を反時計回り 90 度回転させ、最後に左面 W を時計回り 180 度回転させた場合は、「E→B⁻¹→W²」で表すことにする。

4. 調査・研究の方法

研究するにあたり、まず、グループの 7 人全員がルービックキューブの 6 面を揃える練習をして、5 人ができるようになった。それぞれ、各自の 6 面の揃え方は異なるが、基本的な流れは一緒だった。

〈基本的な流れ〉

- ① 完全一面
- ② 二段目までの側面
- ③ ①の対になる面
- ④ ③の側面

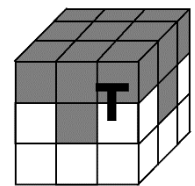


図3 ①を表すルービックキューブ

以下では、①から④について詳しく述べる。

①については、右上の図3で示す。

私たちは初めに上面 T を揃えることとした。

上面 T と 2 段目の一面体が揃っている状態をつくる。

T

②については、右上の図4で示す。

上面 T と 2 段目の一面体を揃えた状態から、2 段目の二面体が揃っている状態をつくる。

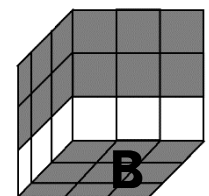


図5 ③を表すルービックキューブ

③については、右の図5で示す。

上面 T のついでになる面の下面 B、1 面を揃える。

このとき下面 B の側面の色の配置は気にしない。

④については、右の図6で示す。

下面 B の 1 面を揃えた状態から、その側面を揃える。

①～④を連続で行うことによって、6 面体の完成ができる。

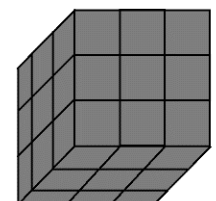


図6 ④を表すルービックキューブ

5. 実験 1

完全一面に着目し、一度 6 面にした状態で同様に崩した状態からスタートし、3 人がどのような過程で完全一面を揃えるかを検討した。

(1) 一回目の実験の結果

俊 $T^- \rightarrow E^2 \rightarrow S^- \rightarrow N^2 \rightarrow B^2 \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow W^- \rightarrow B^2 \rightarrow W \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow E \rightarrow B^2$
 $\rightarrow E \rightarrow W^- \rightarrow E^- \rightarrow B^2 \rightarrow W \rightarrow E \rightarrow W^- \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W$

海生 $T \rightarrow N \rightarrow T^2 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W$

奈歩 $T^- \rightarrow E^2 \rightarrow S^- \rightarrow N^2 \rightarrow B^- \rightarrow N \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow B^2 \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow B^2$
 $\rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S^-$

	T	N	E	S	W	B
俊	-1=3	2	2	-1=3	0	0
海生	3	2	2	0	-1=3	-3=1
奈歩	-1=3	2	2	-1=3	0	0

(2) 一回目の考察

俊と奈歩の回転数の数値は一致したが、二人と海生との数値が一致しなかった。

そのため、もう一度 6 面にしてから一回目とは違う崩しを行ってから、3 人が完全一面をつくった。

(3) 二回目の実験

俊 $W^2 \rightarrow T \rightarrow B^2 \rightarrow S^- \rightarrow T^- \rightarrow E \rightarrow N^- \rightarrow T \rightarrow E^- \rightarrow W \rightarrow B^{-2} \rightarrow W^- \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow E \rightarrow B^-$
 $\rightarrow E^{-2} \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow W \rightarrow B^2 \rightarrow W^-$

海生 $W^2 \rightarrow N \rightarrow E^- \rightarrow T^- \rightarrow W \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T \rightarrow S^- \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow B^- \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow S$
 $\rightarrow N^- \rightarrow B^- \rightarrow N \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow N^- \rightarrow B^- \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow N^- \rightarrow T$

奈歩 $B^- \rightarrow N^2 \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow N^- \rightarrow W^- \rightarrow S^- \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow E^{-2} \rightarrow S^2 \rightarrow B^2 \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^-$
 $\rightarrow B^2 \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S^- \rightarrow B \rightarrow N \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow W \rightarrow B^- \rightarrow W^-$

	T	N	E	S	W	B
俊	1	-1=3	0	-1=3	3	3
海生	1	1	0	-1=3	-1=3	-1=3
奈歩	0	2	2	2	-1=3	0

(4) 二回目の考察

これらの二つの実験をもとに完全一面体が揃えられても、それら以外の二面体や三面体の配置がそれぞれ違うので、3人の数値が一致するとは限らないと考えた。

そこで、全部の配置がそろっている完全6面体なら数値が一致するのではないかと考えた。また、その数値は崩した手順の数値と等しくなるのではないかと考えた。

6. 実験2

全員のキューブを揃えた後で同様に崩していった後で、6面に揃えなおす実験を行った。

(1) 実験結果

俊 $S^- \rightarrow T^- \rightarrow W^2 \rightarrow N^2 \rightarrow B^2 \rightarrow S^- \rightarrow T^- \rightarrow E \rightarrow T^2 \rightarrow S \rightarrow B^2 \rightarrow S^- \rightarrow W^- \rightarrow B^2 \rightarrow W$
 $\rightarrow B \rightarrow W \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow E \rightarrow B^2 \rightarrow E^- \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow B \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^-$
 $\rightarrow B^2 \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow B \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow S \rightarrow B^2 \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow S \rightarrow B^-$
 $\rightarrow S^- \rightarrow S \rightarrow B^2 \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow S \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow N \rightarrow B^2 \rightarrow N^- \rightarrow B^- \rightarrow N \rightarrow B^- \rightarrow N^-$
 $\rightarrow W \rightarrow B^2 \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow E \rightarrow B^2 \rightarrow E^- \rightarrow B^- \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow E$
 $\rightarrow S^- \rightarrow E \rightarrow N^2 \rightarrow E^- \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow N^2 \rightarrow E^2 \rightarrow B \rightarrow E^2 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow B^-$
 $\rightarrow E^- \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow W^2 \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow B \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow B$
 $\rightarrow W^- \rightarrow W^2 \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow B \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow B \rightarrow W$

海生 $E^2 \rightarrow B^- \rightarrow E \rightarrow N^2 \rightarrow B^2 \rightarrow S^- \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow B^- \rightarrow S^2 \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow B \rightarrow S^2$
 $\rightarrow T \rightarrow S \rightarrow T^- \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow S^- \rightarrow E^- \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow S^-$
 $\rightarrow W^- \rightarrow S \rightarrow W \rightarrow E^- \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow S^- \rightarrow T^- \rightarrow S \rightarrow T^- \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow W$
 $\rightarrow S^- \rightarrow W^- \rightarrow E \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow T^- \rightarrow S^- \rightarrow E^- \rightarrow W \rightarrow S^2 \rightarrow W^- \rightarrow S^- \rightarrow W \rightarrow S^- \rightarrow W^-$
 $\rightarrow W \rightarrow S^2 \rightarrow W^- \rightarrow S^- \rightarrow W \rightarrow S^- \rightarrow W^- \rightarrow E \rightarrow S^2 \rightarrow E^- \rightarrow S^- \rightarrow E \rightarrow S^- \rightarrow E^- \rightarrow B$
 $\rightarrow S^2 \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow B \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow T \rightarrow S^2 \rightarrow T^- \rightarrow S^- \rightarrow T \rightarrow S^- \rightarrow T^- \rightarrow E \rightarrow T^-$
 $\rightarrow E \rightarrow B^2 \rightarrow E^- \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow B^2 \rightarrow E^2 \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow B \rightarrow W^2 \rightarrow B^- \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow W^2$
 $\rightarrow B^2 \rightarrow S \rightarrow B^2 \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow B^- \rightarrow S \rightarrow B^- \rightarrow W^2 \rightarrow S$
 $\rightarrow W \rightarrow S \rightarrow W^- \rightarrow S^- \rightarrow W^- \rightarrow S^- \rightarrow W^- \rightarrow S \rightarrow W^-$

奈歩 $B^- \rightarrow N^2 \rightarrow S^- \rightarrow E^2 \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow S \rightarrow W^- \rightarrow N \rightarrow S^- \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow N^- \rightarrow B^2 \rightarrow W$
 $\rightarrow B \rightarrow W^- \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow B$
 $\rightarrow N \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S^- \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow B^2 \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow N$
 $\rightarrow E^- \rightarrow N^- \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow S^- \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow W^- \rightarrow S \rightarrow W \rightarrow S^- \rightarrow B^2 \rightarrow E^- \rightarrow B \rightarrow E$
 $\rightarrow S^- \rightarrow E \rightarrow S \rightarrow E^- \rightarrow S \rightarrow W \rightarrow B \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow B^-$
 $\rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E^- \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow E \rightarrow B^2 \rightarrow E^- \rightarrow B^- \rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow B^2 \rightarrow E^- \rightarrow B^-$
 $\rightarrow E \rightarrow B^- \rightarrow E^- \rightarrow W \rightarrow B^2 \rightarrow W^- \rightarrow B^- \rightarrow W \rightarrow B^- \rightarrow W^- \rightarrow S \rightarrow B^2 \rightarrow S^- \rightarrow B^-$
 $\rightarrow S \rightarrow B^- \rightarrow S^- \rightarrow N \rightarrow B^2 \rightarrow N^- \rightarrow B^- \rightarrow N \rightarrow B^- \rightarrow N^- \rightarrow N^2 \rightarrow W^2 \rightarrow N^- \rightarrow E^-$
 $\rightarrow N \rightarrow W^2 \rightarrow N^- \rightarrow E \rightarrow N^- \rightarrow B^- \rightarrow W^2 \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow N^- \rightarrow W^2 \rightarrow S^- \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow W^2$

	T	N	E	S	W	B
俊	2	0	0	2	0	2
海生	0	2	1	2	0	3
奈歩	3	2	0	2	1	2
崩し	1	0	1	2	1	2

(2) 考察

類似点もあったが、相違点もあった。

私たちが定義した以外の規則や法則が、別の視点や演算、演算の可換についてあるのかもしれないと考えた。

7. 今後の課題

自分たちの決めた視点や定義では、6面を揃えることは難しいと分かったが、私たちの研究の中にも規則性はあった。しかし説明は今の高校までの数学の知識だけでは、十分にできない。この説明をするには、大学で学ぶような知識が必要となるので、今習っている数学を応用的に勉強し、これから、新たな視点、演算、演算の可換について検討し、最小の手順についても模索したい。

8. 引用・参考文献

島内剛一 (2008) 「ルービックキューブと数学パズル」 日本評論社

水野貴裕 (2016) 「群論とルービックキューブ」 東邦大学理学部情報科学科

http://rubikcube.jp/feature/six_field.html (6月30日)